

# 1

[illegible][illegible][illegible]

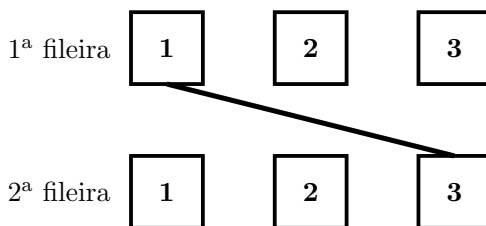
stone



## Prova - Nível 1

1. (20 pontos) Cristina e Elisa criaram um jogo com as seguintes regras:

- São desenhadas duas fileiras com  $n$  quadrados cada. Os quadrados de cada fileira são enumerados da esquerda para a direita sequencialmente com  $1, 2, 3, \dots, n$ ;
  - A primeira a jogar faz uma linha ligando um quadrado qualquer da primeira fileira a um quadrado qualquer da segunda fileira;
  - As jogadoras jogam alternadamente. Em cada jogada, é traçada uma linha ligando um quadrado da primeira fileira a um quadrado da segunda fileira, desde que esses dois quadrados ainda não tenham sido usados em nenhuma ligação (cada quadrado só pode ser ligado uma vez);
  - O jogo termina quando não for mais possível fazer novas ligações;
  - Para determinar a vencedora, observa-se os números dos dois quadrados ligados na última jogada:
    - Se a soma desses dois números for um **número par**, a jogadora que fez a última jogada **ganha**;
    - Se a soma desses dois números for um **número ímpar**, a jogadora que fez a última jogada **perde**.
- (a) A figura a seguir representa um jogo com  $n = 3$ , onde Cristina inicia ligando o 1º quadrado da 1ª fileira ao 3º quadrado da 2ª fileira.
- Elisa, que é a próxima a jogar, tem quatro opções de jogadas. Quais delas lhe darão a vitória? Explique seu raciocínio.



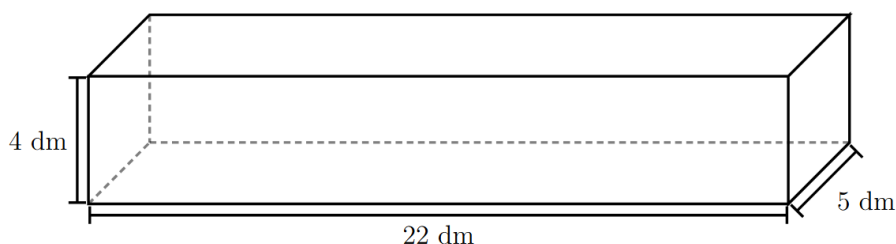
- (b) Considere um cenário com **4 quadrados em cada fileira**. Se Cristina for a primeira a jogar, qual jogadora possui a estratégia vencedora? Justifique sua resposta.
- (c) Considere um cenário com **5 quadrados em cada fileira**. Se Cristina for a primeira a jogar, qual jogadora possui a estratégia vencedora? Justifique sua resposta.
2. (20 pontos) Maria resolveu fazer uma surpresa doce para seus 5 filhos no fim de semana: comprou uma caixa cheia de chocolates e fez duas rodadas de distribuição:
- Primeira rodada:** No sábado, Maria decidiu usar  $\frac{2}{3}$  dos chocolates da caixa para a primeira rodada de distribuição. Ela dividiu esses chocolates igualmente entre os 5 filhos, sem partir nenhum chocolate. Mas, na hora de entregar, **sobrou 1 chocolate**, que não podia ser dividido. Maria guardou esse chocolate de volta na caixa, junto com os que ainda não tinha usado.
- Segunda rodada:** No domingo, ela pegou todos os chocolates que restavam na caixa e fez uma segunda rodada de distribuição entre os cinco filhos, garantindo que cada um recebesse a mesma quantidade.
- Pergunta:** Quantos chocolates sobraram após a segunda rodada de distribuição feita por Maria? Justifique sua resposta.
3. (20 pontos) José é um garoto super curioso que adora explorar padrões numéricos. O número favorito de José é o 9, porque ele acredita que esse número guarda segredos mágicos!
- Um dia, ele decidiu criar uma lista secreta com todos os números de três algarismos cuja soma dos algarismos é exatamente 9. Por exemplo, ele **incluiu** o número 540 (pois  $5 + 4 + 0 = 9$ ) mas **não incluiu** o número 443 (pois  $4 + 4 + 3 = 11$ ).
- José quer saber duas coisas, mas precisa da sua ajuda para resolver esse enigma numérico:
- (a) Quantos números farão parte da sua lista secreta?
- (b) Qual é a soma de todos os números que estão nessa lista?



4. (20 pontos) Uma confeitaria foi contratada para produzir um bolo gigante para a comemoração dos 440 anos do estado da Paraíba, devendo seguir algumas regras:

- O bolo deverá ter formato de paralelepípedo, possuindo seis faces retangulares;
- O volume do bolo deve ser igual a  $440 \text{ dm}^3$  (lembrete: 1 dm corresponde a 10 cm);
- As medidas das arestas do bolo, em decímetros, devem ser números inteiros.  
Portanto, valores como 3,7 dm ou 4,5 dm não são permitidos;
- A largura do bolo não pode ser menor do que sua altura, e o comprimento não pode ser menor do que a largura.

A figura a seguir mostra um projeto de bolo que atende às regras. Nesse modelo, o bolo possui 22 dm de comprimento, 5 dm de largura e 4 dm de altura. Sabendo que o volume de um paralelepípedo é calculado pelo produto entre seu comprimento, sua largura e sua altura, responda:



- (a) Qual é a maior altura possível para um bolo que satisfaz todas as regras estabelecidas?
- (b) Quantos projetos diferentes de bolo são possíveis, considerando todas as regras estabelecidas?
5. (20 pontos) Em 2025, a Paraíba completou 440 anos em 5 de agosto. Para marcar essa data, um designer foi contratado para criar uma arte comemorativa utilizando os algarismos 4, 4 e 0. Cada número foi representado em formato estilizado e dividido em diversas regiões internas, conforme ilustrado na figura.



Para que a arte fique bonita, o designer quer que as regras abaixo sejam seguidas:

- Todas as regiões devem receber uma cor, e só podem ser vermelho, preto, amarelo ou laranja.
- Regiões vizinhas (isto é, aquelas que se tocam pela borda) não podem ter a mesma cor
- Não é permitido misturar cores.

Com base nessas condições, responda:

- (a) De quantas maneiras distintas é possível colorir o **número quatro** da arte?
- (b) De quantas maneiras distintas é possível colorir o **número zero** da arte?
- (c) De quantos modos é possível pintar a arte completa?